

Universidade Federal do Espírito Santo
Relatório Técnico - REL-LCAD-02/2012
Formulações Estabilizadas Submalhas
Aplicadas às Equações de Euler

Roberta Nunes Mattos, Isaac Pinheiro dos Santos e Lucia Catabriga

9 de novembro de 2012

Resumo

As equações de Euler compressíveis formam um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não lineares de primeira ordem, proveniente das *leis de conservação da massa, momentum e energia*. Essas equações descrevem o escoamento de fluidos na natureza, considerados não viscosos. Na engenharia de petróleo, as equações de Euler podem ser utilizadas na simulação de explosões acidentais em plataformas *offshore* (Cant et al. (2004), citado por Souza (2008)) e na engenharia aeroespacial essas equações são utilizadas no projeto de aeronaves e afins (Lohner (2001) e Donea and Huerta (2003), citados por Souza (2008)).

O estudo das equações de Euler no contexto do método de elementos finitos é desenvolvido desde os anos oitenta (Aliabadi et al., 1993; Almeida and Galeão, 1996; Beau and Tezduyar, 1991; Catabriga and Coutinho, 2002; Catabriga et al., 2005; Shakib, 1988; Tezduyar and Hughes, 1982, 1983; Tezduyar and Senga, 2006, 2007; Tezduyar et al., 2006). É conhecido, que o método de elementos finitos de Galerkin clássico não é adequado para resolver equações diferenciais com comportamento hiperbólico, como é o caso das equações de Euler. Para contornar as dificuldades numéricas desse método, desenvolveu-se os chamados métodos estabilizados ou métodos de Petrov-Galerkin. Estes métodos consistem em adicionar um termo à formulação de Galerkin, baseado no resíduo da equação e ponderado com um parâmetro de estabilização, gerando uma nova formulação variacional consistente e com maior estabilidade. Esta nova classe de métodos, surgiu no início dos anos oitenta com o método SUPG (*Streamline Upwind Petrov Galerkin*) (Brooks and Hughes, 1982) para problemas predominantemente convectivos. Os métodos estabilizados possuem uma sólida validação matemática e numérica, mas o seu uso prático depende da escolha adequada de um coeficiente, comumente chamado de parâmetro de estabilização. Além disso, estes métodos não impedem as oscilações nas regiões de altos gradientes. Pode-se evitar ou reduzir estas oscilações através dos métodos de captura de descontinuidades, como o CAU (*Consistent Approximate Upwind*) (Almeida and Galeão, 1996; Galeão and Carmo, 1988) e o $YZ\beta$ (Rispoli et al., 2007; Tezduyar and Senga, 2007).

Uma outra classe de métodos estabilizados são os métodos multiescalas. Em geral, esses métodos consistem em decompor o problema em dois subproblemas: um associado a discretização utilizada (macro escala - escala resolvida) e o outro relacionado às escalas menores, submalhas (micro

escala - escala não resolvida). Os efeitos não locais da micro escala são incorporados na macro escala resultando em um problema enriquecido para as escalas resolvidas, que é então solucionado numericamente (Santos, 2007). Exemplos desses métodos são: RFB (*Residual-Free Bubbles*) (Brezzi and Russo, 1994; Brezzi et al., 1997), VMS (*Variational Multiscale*) (Hughes, 1995; Hughes et al., 2004), MFEM (*Multiscale Finite Element Method*) (Hou and Wu, 1997; Tang et al., 2006) e SGS (*Subgrid Stabilization*) (Guermond, 2001, 1999; Guermond et al., 2006; Heitmann, 2003; Kaya and Layton, 2003; Layton, 2002). Em (Santos, 2007; Santos and Almeida, 2007a) é desenvolvido um método multiescala não linear (NSGS - *Nonlinear Subgrid Stabilization*) para problemas de transporte predominantemente convectivos, onde um operador dissipativo não linear e não parametrizado agindo isotropicamente somente na micro escala é adicionado à formulação de Galerkin. Como extensão deste método, é apresentado o método de estabilização submalha Difusão Dinâmica (DD), introduzido por Arruda et al. (2010) para a equação de convecção-difusão-reação que adiciona à formulação de Galerkin um operador não linear, agindo em todas as escalas da discretização. Em geral, os resultados numéricos obtidos pelo método DD são melhores do que àqueles obtidos pelo método NSGS. Em ambos métodos multiescala não lineares, a quantidade de difusão artificial é determinada pela solução na escala resolvida a nível do elemento, sendo portanto um método auto-adaptativo e livre de parâmetros de estabilização.

Neste relatório técnico, o método de estabilização submalha Difusão Dinâmica é estendido para as equações de Euler em variáveis conservativas, considerando que as escalas submalhas sejam transientes. O algoritmo preditor multicorretor de segunda ordem descrito em Hughes and Tezduyar (1984) é utilizado para a integração no tempo e os sistemas lineares resultantes em cada correção são resolvidos pelo método iterativo GMRES Saad and Schultz (1986). São considerados um conjunto de experimentos clássicos tais como, choque normal, choque oblíquo e choque refletido para aferir a acuidade da solução aproximada encontrada. Experimentos numéricos são realizados e comparados com a formulação estabilizada SUPG/CAU (*Streamline Upwind Petrov Galerkin/ Consistent Approximate Upwind*) Almeida and Galeão (1996); Catabriga and Coutinho (2002).

Capítulo 1

Modelo Matemático e Formulação Numérica Estabilizada

O sistema de Equações de Euler, usando variáveis conservativas definidas por $\mathbf{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho e)$, é dado por

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad \text{sobre } \Omega \times [0, T], \quad (1.1)$$

onde ρ é a massa específica, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ é o campo de velocidades, e é a energia total por unidade de massa, \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y são os fluxos de Euler, Ω é um domínio convexo poligonal de \mathbb{R}^2 com fronteira Γ , e T é um número real positivo. As coordenadas espaciais e temporal são dadas por $\mathbf{x} = (x, y) \in \bar{\Omega}$ e $t \in [0, T]$, onde $\bar{\Omega}$ é o fecho de Ω . A Eq. (1.1) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad \text{sobre } \Omega \times [0, T], \quad (1.2)$$

onde

$$\mathbf{A}_x = \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{U}} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_y = \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{U}}.$$

Um conjunto de condições de contorno e iniciais devem ser definidas de forma apropriada para a Eq. (1.2), completando a descrição do modelo.

Seja \mathcal{T}_h uma triangulação do domínio Ω em nel elementos Ω_e . A formulação SUPG/CAU para o sistema de equações de Euler em variáveis

conservativas consiste em achar $\mathbf{U}^h \in \mathcal{U}^h$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \tau \left(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \mathbf{A}_x^h + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \mathbf{A}_y^h \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde \mathcal{U}^h é o espaço das funções testes e \mathcal{W}^h é o espaço das funções admissíveis, do método de Galerkin, formados por funções contínuas e lineares por partes em Ω . Os parâmetros de estabilização adotados, τ do método SUPG e δ do operador de captura de descontinuidades CAU, podem ser encontrados em Catabriga and Coutinho (2002).

Para definição do método de estabilização Difusão Dinâmica, considere o seguinte enriquecimento dos espaços de aproximação \mathcal{U}^h e \mathcal{W}^h , dado por

$$\mathcal{U}^E = \mathcal{U}^h \oplus \mathcal{U}^B; \quad (1.4)$$

$$\mathcal{W}^E = \mathcal{W}^h \oplus \mathcal{W}^B, \quad (1.5)$$

onde \mathcal{U}^B e \mathcal{W}^B são, respectivamente, os espaços de funções testes e admissíveis, formados por funções bolhas Santos (2007) – ver Fig. 1.1. As funções enriquecidas $\mathbf{U}^E \in \mathcal{U}^E$ e $\mathbf{W}^E \in \mathcal{W}^E$ são decompostas unicamente da seguinte forma

$$\mathbf{U}^E = \mathbf{U}^h + \mathbf{U}^B, \quad \text{onde } \mathbf{U}^h \in \mathcal{U}^h \text{ e } \mathbf{U}^B \in \mathcal{U}^B; \quad (1.6)$$

$$\mathbf{W}^E = \mathbf{W}^h + \mathbf{W}^B, \quad \text{onde } \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h \text{ e } \mathbf{W}^B \in \mathcal{W}^B. \quad (1.7)$$

No contexto dos métodos multiescala, \mathcal{U}^h e \mathcal{W}^h representam os espaços das escalas resolvidas (espaços macro), enquanto que \mathcal{U}^B e \mathcal{W}^B representam os espaços das escalas não resolvidas (espaços micro ou submalha) Santos (2007). Em geral, os espaços \mathcal{U}^h e \mathcal{W}^h são formados por funções contínuas em Ω e polinomiais em cada elemento $\Omega_e \in \mathcal{T}_h$. O método de estabilização submalha Difusão Dinâmica para a Eq. (1.2) consiste em achar $\mathbf{U}^E \in \mathcal{U}^E$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^E \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \xi_h \left(\frac{\partial \mathbf{W}^E}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^E}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^E}{\partial y} \right) d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}^E \in \mathcal{W}^E \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde

$$\xi_h = \xi_h(\mathbf{U}^h) = \begin{cases} \mu(h) \frac{\|R(\mathbf{U}^h)\|_{\tilde{A}_0^{-1}}}{\|\nabla \mathbf{U}^h\|_{\tilde{A}_0^{-1}}}, & \text{se } \|\nabla \mathbf{U}^h\|_{\tilde{A}_0^{-1}} < \text{tol}_\xi; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1.9)$$

sendo $\mu(h) = \sqrt{2A^e}$ o parâmetro característico submalha, com A^e a área do elemento Ω_e , $\text{tol}_\xi = 10^{-10}$ neste trabalho, $R(\mathbf{U}^h)$ é o resíduo da equação no interior de Ω_e , denotado por

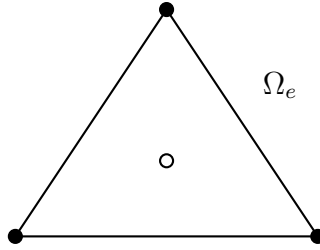
$$R(\mathbf{U}^h) = \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y},$$

e

$$\|\nabla \mathbf{U}^h\|_{\tilde{A}_0^{-1}} = \left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right\|_{\tilde{A}_0^{-1}} + \left\| \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right\|_{\tilde{A}_0^{-1}},$$

onde \tilde{A}_0 é o tensor métrico riemanniano Shakib (1988) e

$$\|\mathbf{v}\|_{\tilde{A}_0^{-1}} = \mathbf{v}^T \tilde{A}_0^{-1} \mathbf{v}.$$



● pontos nodais de \mathcal{U}^h e \mathcal{W}^h

○ ponto nodal de \mathcal{U}^B e \mathcal{W}^B

Figura 1.1: Representação dos espaços \mathcal{U}^E e \mathcal{W}^E .

A função bolha escalar utilizada em cada elemento Ω_e é definida por

$$b^e(x, y) = 27N_1(x, y)N_2(x, y)N_3(x, y), \quad (1.10)$$

onde $N_i(x, y)$ representa a função de forma local do método de Galerkin associada ao ponto nodal $i = 1, 2, 3$. Para acelerar a convergência do processo

iterativo, o cálculo de (1.9) no passo de tempo $n + 1$ é determinado conforme em Santos and Almeida (2007b), isto é,

$$\xi_h^{n+1} = \frac{1}{2}(\xi_h^{n+1} + \xi_h^n).$$

A Eq. (1.8) pode ser particionada em duas outras equações, uma associada às escalas resolvidas:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega \\ & \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \xi_h \left(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h, \end{aligned} \quad (1.11)$$

e a outra associada às escalas submalhas:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^B \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega_e} \xi_h \left(\frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{W}^B \in \mathcal{W}^B. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Em (1.11) e (1.12), os termos

$$\int_{\Omega_e} \xi_h \left(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_e} \xi_h \left(\frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega$$

provenientes da formulação Difusão Dinâmica e o termo convectivo associada à micro escala

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}^B \cdot \left(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega \quad (1.13)$$

foram omitidos, por serem nulos. As equações (1.11) e (1.12) são fortemente acopladas, dificultando o processo de condensação estática para eliminar a variável \mathbf{U}^B Werner (2011); Yang and Samper (2009). Uma forma de simplificar a equação submalha, Eq. (1.12), é assumir a hipótese de escalas submalhas *quase-estáticas* Codina and Blasco (2002); Juanes (2003); Yang and Samper (2009), isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} \approx 0. \quad (1.14)$$

Essa abordagem foi utilizada por Werner Werner (2011) no método Difusão Dinâmica aplicado à problemas de escoamento miscível em meios

porosos. Trabalhos recentes considerando escalas submalhas *transientes* (ou dinâmicas) são apresentados em Codina et al. (2007); Gamnitzer et al. (2010); Nassehi and M.Parvazinia (2009). Nos testes preliminares realizados considerando a hipótese (1.14) para as equações de Euler, o método Difusão Dinâmica não apresentou resultados satisfatórios. Neste trabalho, é apresentado um esquema numérico para resolver (1.11)-(1.12) considerando que as escalas submalhas sejam transientes.

As equações (1.11) e (1.12) resultam em um sistema local de equações diferenciais ordinárias fortemente acoplado da forma

$$\begin{bmatrix} M_{hh} & M_{hB} \\ M_{Bh} & M_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_h \\ \dot{\mathbf{U}}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hB} \\ K_{Bh} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_h \\ \mathbf{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_h \\ 0_B \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

onde

- \mathbf{U}_h e \mathbf{U}_B são os vetores que representam as soluções \mathbf{U}_h e \mathbf{U}_B nos pontos nodais macro e micro, respectivamente, de cada elemento Ω_e . Analogamente, $\dot{\mathbf{U}}_h$ e $\dot{\mathbf{U}}_B$ são vetores que representam $\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t}$ e $\frac{\partial \mathbf{U}_B}{\partial t}$ nos pontos nodais macro e micro, respectivamente, de cada elemento Ω_e ;
- M_{hh} , M_{hB} , M_{Bh} e M_{BB} são matrizes locais de massa associadas, respectivamente, aos termos

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega, \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega, \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial t} d\Omega;$$

- K_{hh} é a matriz local de rigidez associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \left(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega_e} \xi_h \left(\frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega$$

- K_{hB} e K_{Bh} são matrizes locais de rigidez associadas aos termos

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{W}^h \cdot \left(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_e} \mathbf{W}^B \cdot \left(\mathbf{A}_x^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x} + \mathbf{A}_y^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial y} \right) d\Omega,$$

respectivamente;

- K_{BB} é a matriz local de rigidez associada ao termo

$$\int_{\Omega_e} \xi_h \left(\frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}^B}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^B}{\partial y} \right) d\Omega.$$

O sistema (1.15) resulta em duas equações:

$$M_{hh}\dot{U}_h + M_{hB}\dot{U}_B + K_{hh}U_h + K_{hB}U_B = 0_h \quad (1.16)$$

e

$$M_{Bh}\dot{U}_h + M_{BB}\dot{U}_B + K_{Bh}U_h + K_{BB}U_B = 0_B. \quad (1.17)$$

Considerando uma aproximação por diferenças finitas de primeira ordem para a derivada temporal na escala submalha, no passo de tempo $n + 1$,

$$\dot{U}_B^{n+1} \cong \frac{U_B^{n+1} - U_B^n}{\Delta t}, \quad (1.18)$$

onde $\Delta t > 0$ é o passo no tempo e substituindo este resultado na Eq. (1.17), associada à micro escala, obtemos

$$U_B^{n+1} = (M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} \left[M_{BB}U_B^n - \Delta t \left(M_{Bh}\dot{U}_h^{n+1} + K_{Bh}U_h^{n+1} \right) \right], \quad (1.19)$$

onde $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$ é uma matriz local 4×4 inversível (ver Lema 1.0.1).

Lema 1.0.1. *A matriz local $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$ é inversível.*

Demonstração. De fato,

$$M_{BB} = \left(\frac{81A^e}{280} \right) I_4 \quad \text{e} \quad K_{BB} = \beta I_4,$$

onde I_4 é a matriz identidade de ordem 4 e

$$\beta = \begin{cases} \frac{81\xi_h}{40A^e} \left[\sum_{i=1}^3 (x_i^2 + y_i^2) - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) \right] > 0, & \text{se } \xi_h > 0; \\ 0, & \text{se } \xi_h = 0, \end{cases}$$

sendo x_i e y_i , $i = 1, 2, 3$ as coordenadas espaciais dos pontos nodais do elemento Ω_e . Portanto,

$$\det(M_{BB} + \Delta t K_{BB}) = \left(\frac{81A^e}{280} + \Delta t \beta \right)^4 \neq 0$$

e $(M_{BB} + \Delta t K_{BB})$ é inversível. ■

Usando (1.18) e (1.19) em (1.16), obtemos o sistema

$$\widehat{M}\dot{U}_h^{n+1} + \widehat{K}U_h^{n+1} = \widehat{N}U_B^n, \quad (1.20)$$

onde

$$\begin{aligned}\widehat{M} &= \left[M_{hh} - (M_{hB} + \Delta t K_{hB})(M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} M_{Bh} \right]; \\ \widehat{K} &= \left[K_{hh} - (M_{hB} + \Delta t K_{hB})(M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} K_{Bh} \right]; \\ \widehat{N} &= \frac{1}{\Delta t} \left[M_{hB} - (M_{hB} + \Delta t K_{hB})(M_{BB} + \Delta t K_{BB})^{-1} M_{BB} \right].\end{aligned}$$

Através da Equação (1.20) obtemos U_h^{n+1} e \dot{U}_h^{n+1} . O vetor U_B^{n+1} é atualizado usando (1.19). O problema global associado é resolvido usando o algoritmo preditor multicorretor, apresentado em Hughes and Tezduyar (1984). Os sistemas lineares são resolvidos utilizando o método GMRES com um pré-condicionador bloco diagonal nodal Catabriga and Coutinho (2002).

Nesta seção são apresentados os experimentos numéricos considerando três exemplos padrão de escoamentos regidos pela equação de Euler: Choque Normal Unidimensional, Choque Oblíquo Bidimensional e Choque Refletido Bidimensional. Os resultados são comparados com as respectivas soluções analíticas e com as soluções obtidas pela formulação SUPG/CAU. Em todos os exemplos são considerados gases compressíveis com expoente adiabático ($\gamma = 1.4$ e $c_v = 716.5$). No algoritmo de avanço no tempo o número de multicorreções foi fixado em 3, o número de vetores para o *restart* do método GMRES adotado é igual a 5 e a tolerância fixada em 10^{-1} .

1.0.1 Choque Normal Unidimensional

Este problema consiste de um escoamento através de duas regiões separadas por um choque normal. A velocidade inicial do escoamento apresenta uma descontinuidade, que é propagada para o domínio temporal. Considera-se uma malha com 39×2 células, sendo 2 elementos triangulares em cada célula, distribuídos no domínio retangular $\Omega =]0, 39[\times] - 0.5, 0.5[$ conforme a Fig. (1.2). O choque ocorre em $x = 20$ e as condições iniciais, em um sistema de unidades compatível, são dadas por

$$x < 20 \quad \begin{cases} M = 2.0; \\ \rho = 1.0; \\ v_x = 1.0; \\ v_y = 0.0; \\ p = 0.17857, \end{cases} \quad x > 20 \quad \begin{cases} M = 0.57735; \\ \rho = 2.66667; \\ v_x = 0.37500; \\ v_y = 0.0; \\ p = 0.80357, \end{cases}$$

onde M é o número de Mach e p é a pressão.

A Fig. 1.3(a) mostra os perfis de densidade da solução exata e das soluções numéricas obtidas pelos métodos Difusão Dinâmica e SUPG/CAU.

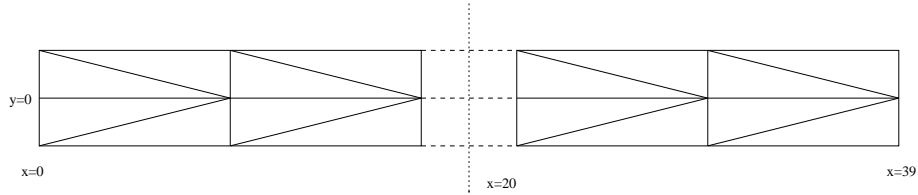


Figura 1.2: Formato da Malha – Choque Normal Unidimensional.

Considerando $\Delta t = 10^{-2}$ nas duas formulações, observa-se que a solução obtida via Difusão Dinâmica está mais próxima da solução exata do que a obtida pela formulação SUPG/CAU. As Figs. 1.3(b) e 1.3(c) mostram, respectivamente, o comportamento dos resíduos das formulações analisadas. Ambos decaem à medida que o tempo avança, porém, a magnitude do resíduo do método SUPG/CAU é maior do que a do método Difusão Dinâmica.

A Tabela 1.1 apresenta o desempenho computacional das implementações realizadas. O método Difusão Dinâmica realizou 1174 iterações GMRES a menos do que o método SUPG/CAU. Entretanto, na montagem das matrizes, onde se encontra o maior esforço computacional, o tempo obtido pelo método Difusão Dinâmica é um pouco mais elevado.

Tabela 1.1: Desempenho Computacional – Choque Normal Unidimensional.

<i>Método</i>	<i>Iter_{GMRES}</i>	<i>Tempo_{CPU} (s)</i>		
		Montagem das Matrizes	Solução GMRES	Total
SUPG/CAU	2199	23.996	0.986	26.821
Difusão Dinâmica	1025	28.066	0.669	30.569

1.0.2 Choque Oblíquo Bidimensional

Este problema consiste em um escoamento bidimensional supersônico – número de Mach $M = 2$ – de um fluido invíscido sobre uma cunha, fazendo um ângulo de -10° em relação à malha, conforme mostrado na Fig. 1.4. Pode-se determinar analiticamente a formação de um choque oblíquo a 29.3° com a parede. O domínio $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ considerado é discretizado em 20×20 células com dois elementos triangulares em cada célula. Considerando um sistema de unidades compatível, as condições de contorno prescritas na

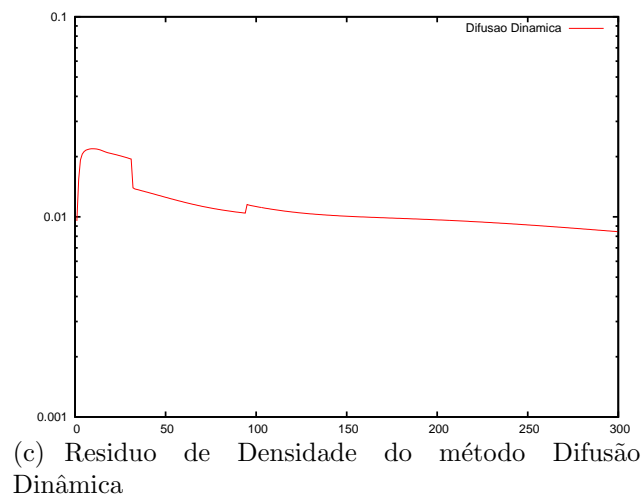
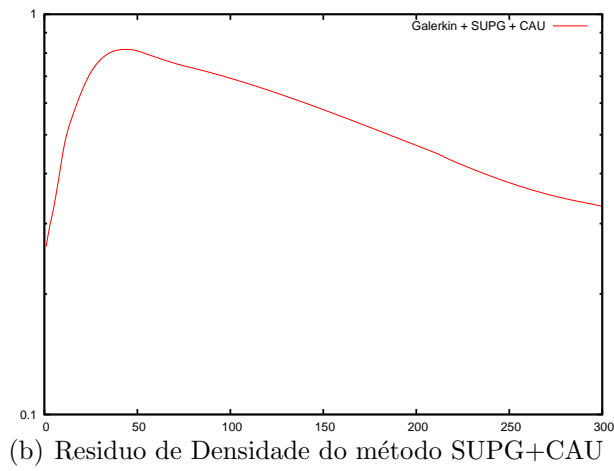
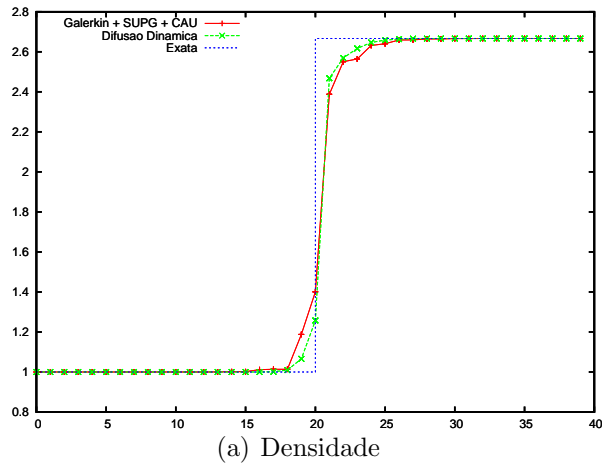


Figura 1.3: Perfis e Resíduos de Densidade das formulações numéricas – Choque Normal Unidimensional

entrada e no topo de Ω são dadas por

$$\begin{cases} M &= 2.0; \\ \rho &= 1.0; \\ v_x &= \cos 10^\circ; \\ v_y &= -\sin 10^\circ; \\ p &= 0.17857. \end{cases}$$

Além disso, a velocidade v_y é nula na parede inferior, não sendo imposta

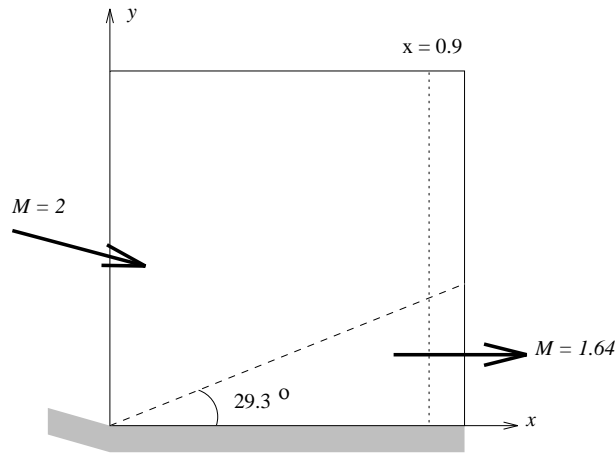


Figura 1.4: Esquema do Problema - Choque Bidimensional Oblíquo.

nenhuma condição na saída. As condições iniciais são consideradas como de escoamento livre. A solução exata na saída abaixo do choque é dada por

$$\begin{cases} M &= 1.64052; \\ \rho &= 1.45843; \\ v_x &= 0.88731; \\ v_y &= 0; \\ p &= 0.30475. \end{cases}$$

A Fig. 1.5 apresenta as isocurvas da densidade para as formulações SUPG/CAU e Difusão Dinâmica, usando uma malha 20×20 . Observe-se que o método Difusão Dinâmica apresenta uma solução menos difusiva na região do choque. A Fig. 1.6 mostra os perfis de densidade no ponto $x = 0.9$ para ambas formulações, considerando três malhas (10×10 , 16×16 e 20×20) com respectivos passos de tempo. As soluções obtidas com o método Difusão Dinâmica representam melhor o choque do que àquelas obtidas pelo método SUPG/CAU, que possui um comportamento mais difusivo.

A dependência do método Difusão Dinâmica em relação ao parâmetro Δt é mostrada na Fig. 1.7, usando uma malha 20×20 . Note que a solução aproximada oscila na região do choque quando $\Delta t = 10^{-2}$. Para $\Delta t = 10^{-3}$ ou $\Delta t = 10^{-4}$, o comportamento da solução é praticamente o mesmo, apresentando apenas uma pequena oscilação na parte inferior do choque. A melhor solução é obtida quando $\Delta t = 10^{-5}$.

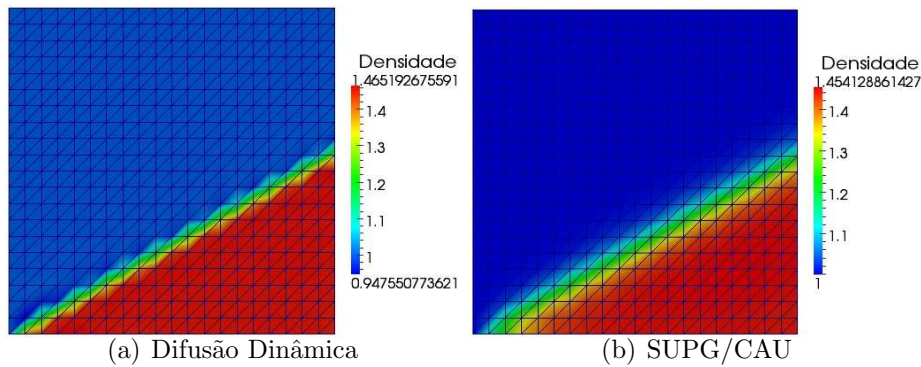


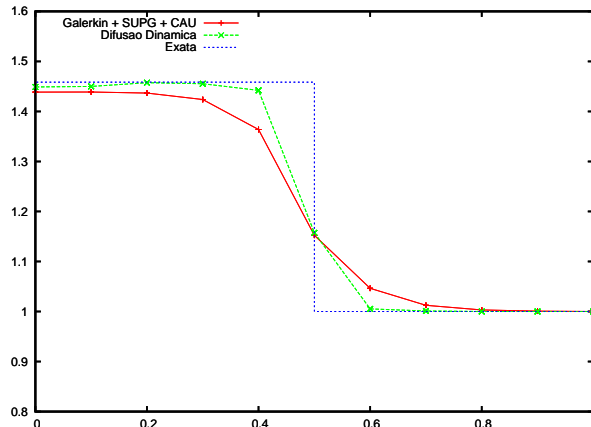
Figura 1.5: Isocurvas de Densidade – malha 20×20 – Choque Oblíquo Bidimensional.

A Fig. 1.8 mostra que o resíduo das duas metodologias avaliadas decaem com o tempo. Mais uma vez, a magnitude do resíduo do método SUPG/CAU é maior do que a do método Difusão Dinâmica.

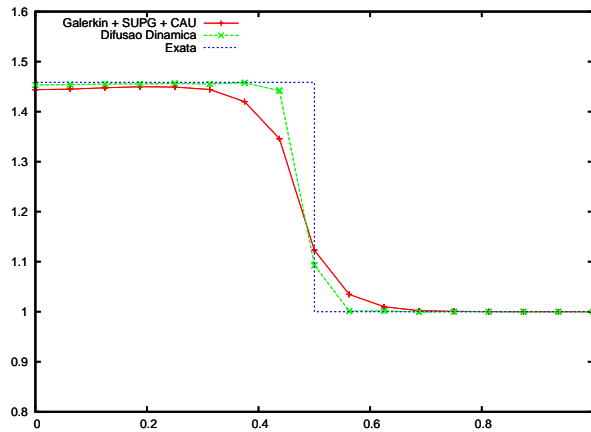
O tempo de processamento e o número de iterações dos métodos analisados são mostrados na Tabela 1.2. Na resolução dos sistemas lineares, o método Difusão Dinâmica executou menos de um terço do número de iterações GMRES obtido pelo método SUPG/CAU. No entanto, o maior esforço computacional do método Difusão Dinâmica encontra-se na estrutura utilizada para montagem das matrizes, tornando o tempo total de processamento deste método maior em relação ao tempo obtido pelo SUPG/CAU.

Tabela 1.2: Desempenho Computacional – malha 20×20 – Choque Oblíquo Bidimensional.

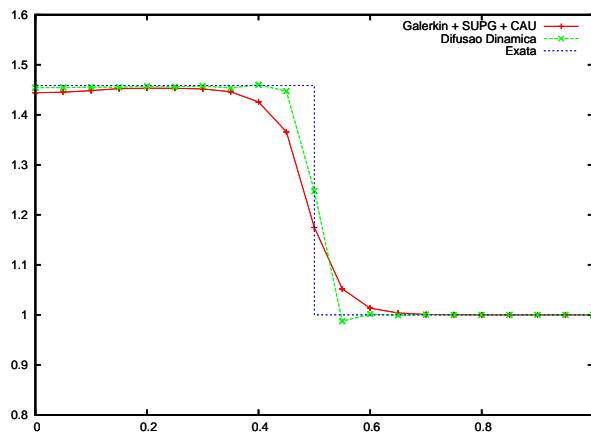
<i>Método</i>	<i>Iter_{GMRES}</i>	<i>Tempo_{CPU} (s)</i>		
		Montagem das Matrizes	Solução GMRES	Total
SUPG/CAU	30389	1161.509	64.252	1268.125
Difusão Dinâmica	9006	1383.513	29.948	1456.456



(a) Malha 10×10 e $\Delta t = 10^{-2}$



(b) Malha 16×16 e $\Delta t = 10^{-3}$



(c) Malha 20×20 e $\Delta t = 10^{-3}$

Figura 1.6: Perfis de Densidade – Choque Oblíquo Bidimensional

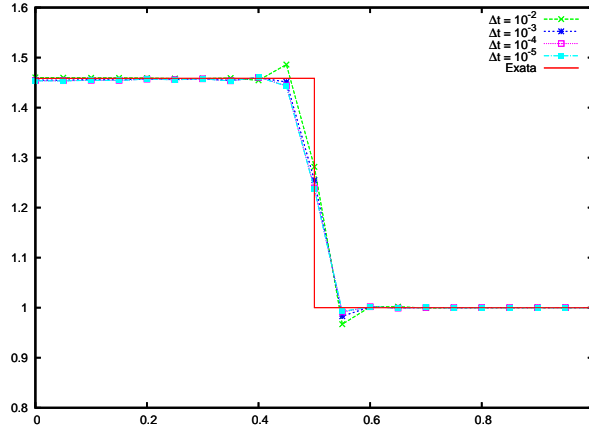


Figura 1.7: Perfis de Densidade – Método Difusão Dinâmica – malha 20×20 – Choque Oblíquo Bidimensional.

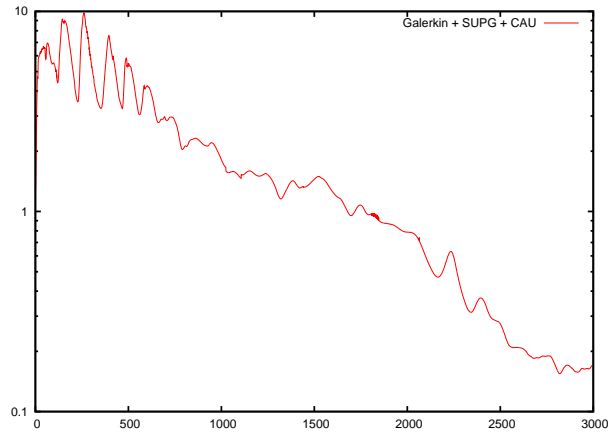
1.0.3 Choque Refletido Bidimensional

Este problema consiste de três regiões de escoamento separadas por um choque oblíquo e sua reflexão ao longo de uma parede, conforme Fig. 1.9. O domínio $\Omega =]0, 4.1[\times]0, 1[$ é particionado em 60×20 células com 2 elementos triangulares em cada célula. Condições de contorno de Dirichlet são prescritas no contorno de entrada e no topo de Ω . Não são impostas condições de contorno na fronteira à direita do domínio. Na fronteira inferior, a componente horizontal do campo de velocidades é prescrita com valor nulo, ou seja, $v_x = 0$. As condições iniciais são de escoamento livre. Considerando um sistema de unidades compatível, os dados na entrada do domínio (parede à esquerda - região 1) são

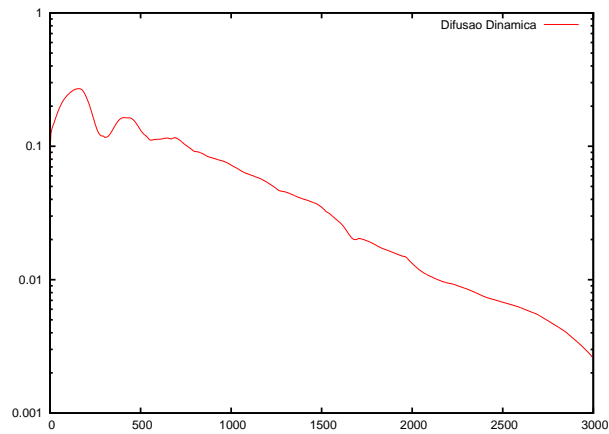
$$\text{Região 1: } \begin{cases} M = 2.9; \\ \rho = 1.0; \\ v_x = 2.9; \\ v_y = 0.0; \\ p = 0.714286. \end{cases}$$

Considerando que a incidência do choque faz um ângulo de 29° , a solução exata nas regiões 2 e 3 são dadas por

$$\text{Região 2: } \begin{cases} M = 2.3781; \\ \rho = 1.7; \\ v_x = 2.61934; \\ v_y = 0.50632; \\ p = 1.52819 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{Região 3: } \begin{cases} M = 1.94235; \\ \rho = 2.68728; \\ v_x = 2.40140; \\ v_y = 0.0; \\ p = 2.93407. \end{cases}$$



(a) SUPG/CAU



(b) Difusão Dinâmica

Figura 1.8: Resíduo de Densidade - malha 20×20 e $\Delta t = 10^{-3}$ - Choque Oblíquo Bidimensional

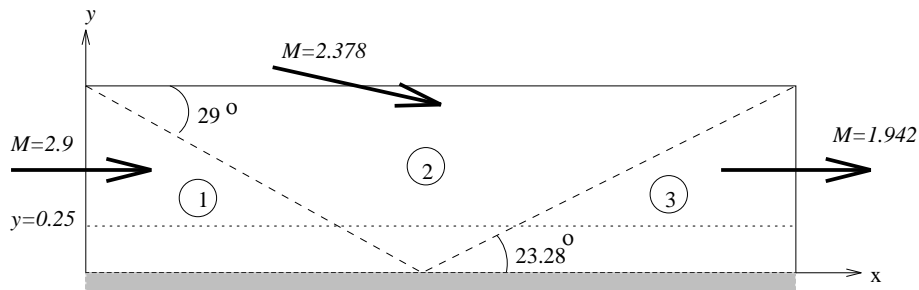


Figura 1.9: Esquema do Problema - Choque Refletido Bidimensional.

A Fig. 1.10 apresenta as isocurvas de densidade, considerando uma malha 60×20 . Observa-se que a solução obtida pelo método Difusão Dinâmica é mais precisa do que àquela obtida pelo método SUPG/CAU. A Fig. 1.11(a) exhibe os perfis de densidade para as duas formulações avaliadas, usando uma malha 60×20 e $\Delta t = 10^{-3}$. Podemos observar que as soluções obtidas pelo método Difusão Dinâmica representam melhor os choques. A Fig.1.11(b) mostra a dependência do método Difusão Dinâmica em relação ao tamanho do passo de tempo Δt . Quando $\Delta t = 10^{-2}$, pequenas oscilações aparecem nas regiões dos choques. Soluções melhores são obtidas quando $\Delta t = 10^{-3}$ ou $\Delta t = 10^{-4}$.

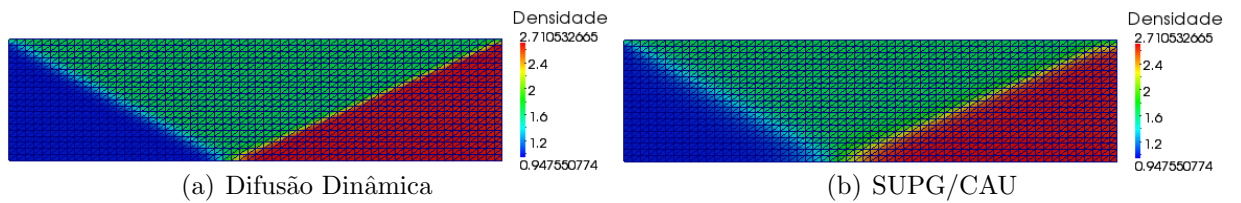
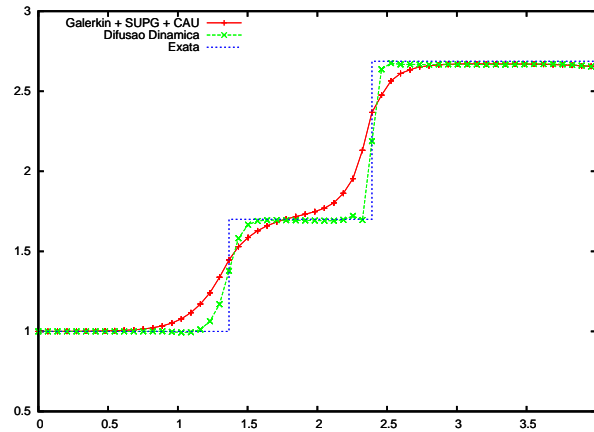


Figura 1.10: Isocurvas de Densidade – malha 60×20 – Choque Refletido Bidimensional.

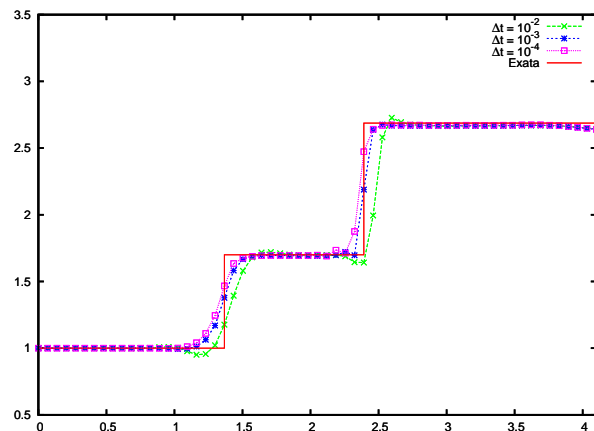
O comportamento dos resíduos é mostrado na Figura 1.12. Podemos observar que eles decaem com o tempo, diferenciando somente na magnitude dos mesmos. A Tabela 1.3 mostra que o método SUPG/CAU executou quase quatro vezes mais iterações GMRES, nas soluções dos sistemas lineares, do que o método Difusão Dinâmica. Mas devido o custo computacional necessário na montagem das matrizes, o método Difusão Dinâmica obteve maior tempo computacional total.

Tabela 1.3: Desempenho Computacional – malha 60×20 – Choque Refletido Bidimensional.

<i>Método</i>	<i>Iter_{GMRES}</i>	<i>Tempo_{CPU} (s)</i>		
		Montagem das Matrizes	Solução GMRES	Total
SUPG/CAU	34869	3852.336	223.332	4173.264
Difusão Dinâmica	9006	4408.701	91.422	4593.458

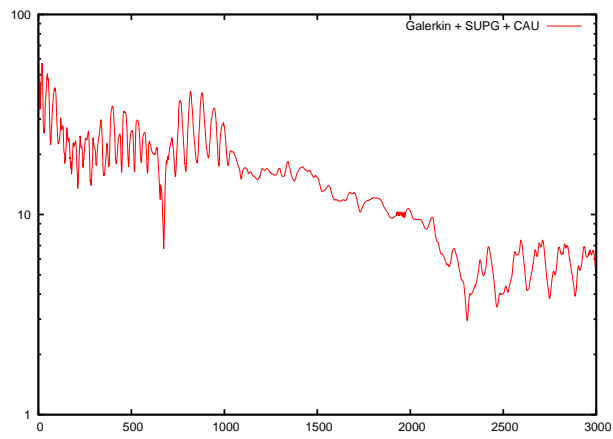


(a) Malha 60×20 - $\Delta t = 10^{-3}$ - SUPG/CAU e Difusão Dinâmica.

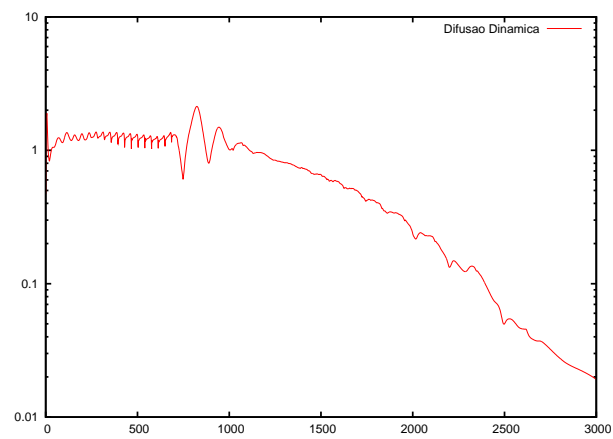


(b) Malha 60×20 - $\Delta t = 10^{-2}$, $\Delta t = 10^{-3}$ e $\Delta t = 10^{-4}$ - Difusão Dinâmica.

Figura 1.11: Perfis de Densidade - Choque Refletido Bidimensional



(a) SUPG/CAU



(b) Difusão Dinâmica

Figura 1.12: Resíduo de Densidade – malha 60×20 e $\Delta t = 10^{-3}$ – Choque Refletido Bidimensional.

1.1 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma implementação do método de elementos finitos para resolver o sistema de equações de Euler compressíveis utilizando a formulação estabilizada submalha Difusão Dinâmica, considerando que as escalas submalhas sejam transientes. Para a integração no tempo foi utilizado um método predictor multicorretor de segunda ordem e os sistemas lineares resultantes em cada correção foram resolvidos pelo método iterativo GMRES, com um pré-condicionador bloco diagonal nodal.

Um conjunto de experimentos, incluindo choques normal, oblíquo e reflexivo, foi considerado e as soluções obtidas pelo método Difusão Dinâmica com escalas submalhas transientes foram comparadas com a solução exata e a solução obtida pela formulação estabilizada SUPG/CAU. O método Difusão Dinâmica obteve resultados mais precisos e com menor número de iterações GMRES, comparado com o SUPG/CAU. No entanto, para os três problemas testados, o tempo total de processamento obtido pelo método SUPG/CAU foi menor, devido ao esforço computacional utilizado na montagem das matrizes do método Difusão Dinâmica. Foi observado também um comportamento condicionalmente estável do método Difusão Dinâmica para os choques oblíquo e reflexivo.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Regina C. Almeida - LNCC (Laboratório Nacional de Computação Científica) pelas valiosas discussões e ao apoio recebido dentro do escopo dos projetos: PRONEX-FAPES/CNPq 48511579/2009, CNPq 309172/2009-8 e CNPq 552630/2011-0.

Referências Bibliográficas

- S.K. Aliabadi, S. E. Ray, and T. E. Tezduyar. Supg finite element computation of viscous compressible flows based on the conservation and entropy variables formulations. *Computational Mechanics*, 11:300–312, 1993.
- R. C. Almeida and A. C. Galeão. An adaptive Petrov-Galerkin formulations for the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129:157–176, 1996.
- R. C. C. Almeida. *Uma formulação de Petrov-Galerkin para a resolução das equações de Euler e Navier-Stokes compressível usando técnicas adaptativas*. Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Agosto 1993.
- N. C. B. Arruda, R. C. Almeida, and E. G. D. do Carmo. Dynamic viscosity formulations for advection dominated transport problems. in preparation for *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010.
- G.J. Le Beau and T. E. Tezduyar. Finite element computation of compressible flows with the supg formulation. In *Advances in Finite Element Analysis in Fluid Dynamics (eds. Dhaubhadel, M.N., Engelmean M.S. e Reddy J.N)*, pages 21–27. ASME, New York, 1991.
- F. Brezzi and A. Russo. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4:571–587, 1994.
- F. Brezzi, L. P. Franca, T. J. R. Hughes, and A. Russo. $b = \int g$. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 145:329–339, 1997.
- A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.

- R. S. Cant, W. N. Dawes, and A. M. Savill. Advanced cfd and modeling of accidental explosions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36:97–119, 2004.
- L. Catabriga. *Soluções implícitas das equações de Euler empregando estruturas de dados por aresta*. PhD thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Maio 2000.
- L. Catabriga and A.L.G.A Coutinho. Implicit SUPG solution of Euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(32):3477–3490, 2002.
- L. Catabriga, A. L. G. A. Coutinho, and T. E. Tezduyar. Compressible flow supg parameters computed from element matrices. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 21, n.9:465–476, 2005.
- R. Codina and J. Blasco. Analysis of a stabilized finite element approximation of the transient convection-diffusion-reaction equation using orthogonal subscales. *Computing and Visualization in Science*, 4:167–174, 2002.
- R. Codina, J. Principe, O. Guasch, and S. Badia. Time dependent subscales in the stabilized finite element approximation of incompressible flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2413–2430, 2007.
- J. Donea and A. Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley and Sons, Ltd, 2003.
- A.C Galeão and E.G.D Carmo. A consistent approximate upwind petrov-galerkin method for convection-dominated problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68:83–95, 1988.
- P. Gamnitzer, V. Gravemeier, and W. A. Wall. Time-dependent subgrid scales in residual-based large eddy simulation of turbulent channel flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:819–827, 2010.
- J.-L. Guermond. Subgrid stabilization of galerkin approximations of linear monotone operators. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 21:165–197, 2001.
- J.-L. Guermond. Stabilization of galerkin approximations of transport equation by subgrid modeling. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33:1293–1316, 1999.

- J.-L. Guermond, A. Marra, and L. Quartapelle. Subgrid stabilized projection method for 2D unsteady flows at high Reynolds numbers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:5857–5876, 2006.
- N. Heitmann. *Subgrid Stabilization of Evolutionary Diffusive Transport Problems*. Phd thesis, Faculty of Arts and Science, University of Pittsburgh, 2003.
- T. Y. Hou and X. H. Wu. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal OF Computational Physics*, 134:169–189, 1997.
- T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall International, Inc., 1987.
- T. J. R. Hughes. Multiscale phenomena: Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, sugrid scale models, bubbles and the origin of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127:387–401, 1995.
- T. J. R. Hughes and T. E. Tezduyar. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45:217–284, 1984.
- T. J. R. Hughes, G. Scovazzi, and L. P. Franca. *Multiscale and Stabilized Methods, Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltd., 2004.
- R. Juanes. *Displacement theory and multiscale numerical modeling of three-phase flow in porous media*. Phd thesis, Engineering - Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2003.
- S. Kaya and W. Layton. Subgrid-scale eddy viscosity models are variational multiscale methods. Technical Report TR-MATH 03-05, University of Pittsburgh, 2003.
- W. J. Layton. A connection between subgrid scale eddy viscosity and mixed methods. *Appl. Math. and Comput.*, 133:147–157, 2002.
- R. Lohner. *Applied CFD Techniques - An Introduction Based on Finite Element Methods*, volume 1. John Wiley and Sons, Ltd, 01 edition, 2001.

- V. Nassehi and M. Parvazinia. A multiscale finite element space-time discretization method for transient transport phenomena using bubble functions. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45:315–323, 2009.
- F. Rispoli, R. Saavedra, Alessandro C., and T. E. Tezduyar. Computation of inviscid compressible flows with the v-sgs stabilization and $\gamma\beta$ shock-capturing. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 54:695–706, 2007.
- Y. Saad and H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM. J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3):856–869, 1986.
- I. P. Santos. *Métodos Submalhas Não Lineares Para o Problema de Convecção-Difusão-Reação*. Tese de doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC, Petrópolis, RJ, Outubro 2007.
- I. P. Santos and R. C. Almeida. A nonlinear subgrid method for advection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:4771–4778, 2007a.
- I. P. Santos and R. C. Almeida. A nonlinear subgrid method for advection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:4771–4778, 2007b.
- F. Shakib. *Finite element analysis of the compressible Euler and Navier-Stokes equations*. PhD thesis, Stanford University, Palo Alto, California, USA, 1988.
- Denis A. F. Souza. *Técnicas Computacionais Para Elementos Finitos Estabilizados na Solução de Leis de Conservação Hiperbólicas Não Lineares*. Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Abril 2008.
- S.Q. Tang, T.Y. Hou, and W.K. Liu. A mathematical framework of the bridging scale method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65:1688–1713, 2006.
- T. E. Tezduyar and T. J. R. Hughes. Development of time-accurate finite element techniques for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *NASA Technical Report NASA-CR-204772*, 1982.
- T. E. Tezduyar and T. J. R. Hughes. Finite element formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the compressible

- euler equations. In *21st Aerospace Sciences Meeting*, pages 878–883. Reno, Nevada, AIAA, 1983.
- T. E. Tezduyar and M. Senga. Stabilization and shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:1621–1632, 2006.
- T. E. Tezduyar and M. Senga. Supg finite element computation of inviscid supersonic flows with $\gamma\beta$ shock-capturing. *Computers and Fluids*, 36,1: 147–159, 2007.
- T. E. Tezduyar, M. Senga, and D. Vicker. Computation of inviscid supersonic flows around cylinders and spheres with the supg formulation and $\gamma\beta$ shock-capturing. *Computational Mechanics*, 38:469–481, 2006.
- S. L. Werner. Método de estabilização submalha difusão dinâmica aplicado na simulação de escoamentos miscíveis em meios porosos. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Informática/UFES, Vitória, ES, Fevereiro 2011.
- C. Yang and J. Samper. A subgrid-scale stabilized finite element method for multicomponent reactive transport through porous media. *Transp Porous Media*, 78:101–126, 2009.